

空间一波数域二维强磁场及其梯度张量数值模拟研究

戴世坤^{1,2}, 冉应强^{*1,2}, 张莹^{1,2}, 陈轻蕊^{1,2}, 凌嘉宣^{1,2}, 贾金荣^{1,2}

(1. 中南大学有色金属矿预测与地质环境监测教育部重点实验室, 湖南长沙 410083;

2. 中南大学地球科学与信息物理学院, 湖南长沙 410083)

摘要: 基于磁位泊松方程提出了一种空间一波数混合域二维数值模拟方法。该方法将二维强磁性体磁位满足的偏微分方程通过一维傅里叶变换转化为不同波数之间相互独立的常微分方程, 即将二维数值模拟问题转换为一维数值模拟问题, 并利用一维有限元法进行求解, 可大大降低存储需求和计算量。对求得的强磁场利用紧算子进行迭代以获得高精度近似解。算法中保留垂向为空间域, 可根据需求对网格进行灵活剖分, 有利于复杂条件下的模拟。另外, 不同波数之间常微分方程相互独立, 具有较好的并行性。算法充分利用了傅里叶变换的快速性和迭代算法的稳定性, 实现了强磁场及其梯度张量的二维数值模拟。设计三个模型(水平地形下的圆柱体模型、棱柱体模型及起伏地形模型)进行计算, 对文中方法数值解与解析解、COMSOL 软件所得的数值解进行对比, 结果表明该算法计算速度快、精度高, 适用于起伏地形条件下的数值计算。

关键词: 强磁场, 梯度张量, 空间一波数混合域, 二度体正演

中图分类号: P631 文献标识码: A doi: 10.13810/j.cnki.issn.1000-7210.2023.01.024

Numerical simulation of two-dimensional strong magnetic field and its gradient tensor in space-wavenumber domain

DAI Shikun^{1,2}, RAN Yingqiang^{1,2}, ZHANG Ying^{1,2}, CHEN Qingrui^{1,2}, LING Jiaxuan^{1,2}, JIA Jinrong^{1,2}

(1. Key Laboratory of Metallogenic Prediction of Nonferrous Metals and Geological Environment Monitoring, Ministry of Education, Central South University, Changsha, Hunan 410083, China;

2. School of Geosciences and Info-physics, Central South University, Changsha, Hunan 410083, China)

Abstract: On the basis of the Poisson equation of magnetic potential, a two-dimensional numerical simulation method of the mixed space-wavenumber domain is proposed. The method uses the one-dimensional Fourier transform and transforms the partial differential equation suitable for the magnetic potential of a two-dimensional strong magnetic body into an ordinary differential equation with independent different wavenumbers. In other words, it changes the two-dimensional numerical simulation question into a one-dimensional one for solutions and employs the one-dimensional finite element method to solve the one-dimensional numerical simulation question, so as to greatly reduce storage demands and computational loads. Furthermore, a high-precision approximate solution of the solved strong magnetic field is obtained by using a compact operator for iteration. In the algorithm, the vertical direction is reserved as the spatial domain, and the mesh can be flexibly divided according to the demand, which is conducive to simulating complex conditions. In addition, the ordinary differential equation among different wavenumbers is independent and has excellent parallelism. The algorithm makes full use of the rapidness of the Fourier transform and the stability of the iterative algorithm and realizes the two-dimensional numerical simulation of the strong magnetic field and its gradient tensor. Three models (cylinder and prism models under horizontal terrain and model under undulating terrain) are calculated, and the numerical solution is compared with the analytical solution and the numerical solution by COMSOL software. The results show that the algorithm is fast and highly accurate and thus is suitable for undulating terrain.

Keywords: strong magnetic field, gradient tensor, mixed space-wavenumber domain, two-dimensional forward modeling

* 湖南省长沙市岳麓区麓山南路 932 号中南大学地球科学与信息物理学院, 410083. Email: 1422143074@qq.com

本文于 2022 年 1 月 4 日收到, 最终修改稿于同年 10 月 19 日收到。

本研究受中南大学研究生自主探索创新项目“二维强磁场及其张量梯度正反演算法研究”(2022ZZTS0557)资助。

戴世坤,冉应强,张莹,等. 空间一波数域二维强磁场及其梯度张量数值模拟研究[J]. 石油地球物理勘探, 2023, 58(1): 228-237.

DAI Shikun, RAN Yingqiang, ZHANG Ying, et al. Numerical simulation of two-dimensional strong magnetic field and its gradient tensor in space-wavenumber domain[J]. Oil Geophysical Prospecting, 2022, 58(1): 228-237.

0 引言

近年来,强磁性体的退磁效应逐渐成为磁场正、反演领域的研究热点。当磁性体磁化率低于 0.1 SI 时,可忽略退磁效应^[1];当磁性体磁化率高于 0.1 SI 时,退磁效应会显著影响磁异常的幅值、形态等,进而影响磁测数据的处理和解释结果,所以在强磁性体磁场正、反演过程中必须考虑退磁效应的影响。考虑到三维模型的计算量太大,且实际勘探过程中,当地质体沿走向的尺度远大于垂直走向的尺度时(如断层、接触带等),这类地质体可用走向方向无限延伸的二度体近似,既能满足勘探要求,也能大大提高计算效率^[2]。

目前,对于二度体磁异常的研究多是基于弱磁情况,可忽略退磁效应。Bhattacharyya 等^[3-4]、Pedersen^[5]、吴宣志^[6]给出了频率域不同二度体模型的弱磁异常场表达式;Talwani 等^[7]、Shuey 等^[8]、Plouff^[9]、Singh 等^[10]、Won 等^[11]、贾真^[12]提出了空间域二度体数值模拟算法;对于频率域弱磁正演计算方法,柴玉璞^[13]基于偏移抽样提高了反傅里叶变换数值精度;Tontinif 等^[14]研究了快速傅里叶变换扩边法与误差的关系;Wu 等^[15]在偏移采样的基础上提出了高斯傅里叶变换方法,有效提高了弱磁场数值模拟的精度和效率。

考虑退磁效应的情况下,强磁场数值模拟方法主要有以下三类:积分方程法、有限体积法和有限单元法。Eskola 等^[16]基于积分方程提出了考虑退磁效应的静磁方程,其解的准确性与代数方程组的规模有关;Ouyang 等^[17]基于强磁场积分方程,采用棱柱体剖分方法实现了强磁性体的正演计算,采用 Gauss-FFT 方法减小了截断效应;Kostrov^[18]提出了一种采用三角单元的体积分方法求解考虑退磁效应的二维磁场正演问题;付文祥^[19]基于体积分方法提出一种采用三角棱柱单元拟合二度体的方法,并给出了考虑退磁影响的无限长水平圆柱体的总磁场强度异常的理论解析表达式;欧洋等^[20]利用有限体积法实现了同时考虑退磁和剩磁的正演模拟;王书

惠^[21]在不引入均匀磁化设定、考虑退磁效应影响的情况下,利用有限元计算了强磁性复杂形体的磁异常;刘双等^[22]利用 FlexPDE 软件实现了二度圆柱体、板状体的有限元强磁场正演,总结了退磁作用对磁异常幅值影响的规律;另外,刘鑫磊^[23]计算了具有各向异性、非均匀磁化率分布的任意形态地质体的磁场,计算过程考虑了退磁效应,但计算结果可能会不连续;Purssm 等^[24]采用迭代方法推导了复杂地形下高磁化率地质体的磁场表达式,但计算结果误差较大。

现有的强磁场数值模拟方法大多基于有限单元法、有限体积法等,这些方法最终都归结为大型线性方程组的求解,对于复杂条件下的大规模二维强磁场数值的模拟存在计算效率低的问题。此外,由重磁位场的研究结论可知,与总磁场相比,梯度张量对异常体边界的识别能力更强、分辨率更高,而现有关于强磁场梯度张量的数值模拟研究较少。因此,本文提出一种适用于大规模复杂条件(复杂磁化率分布和起伏地形)的二度体强磁场及其张量梯度的正演方法——空间一波数混合域二维强磁场及梯度张量数值模拟方法。该方法利用一维傅里叶变换将空间域二维强磁性体磁位满足的二维偏微分方程转换为空间一波数混合域磁位满足的一维常微分方程,利用有限单元法对每个波数下的空间一波数混合域磁位进行计算,并利用追赶法求解定带宽线性方程组,得到空间一波数混合域磁位,利用位场与张量梯度之间的关系得到相应的空间一波数域磁场分量,再经过反傅里叶变换求得空间域场。该算法通过迭代对强磁场进行数值逼近,确保了算法稳定和收敛。

1 方法原理

1.1 控制方程

强磁性体二维磁位方程^[25]为

$$\nabla^2 U(x, z) = \nabla \cdot \mathbf{M}(x, z) \quad (1)$$

式中: U 为空间域磁位; $\mathbf{M} = [M_x \quad M_z]^T$ 为空间域磁化强度,其中 M_x 、 M_z 分别表示 x 和 z 方向的磁化强度;散度算子 $\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$,其中 \mathbf{e}_x 和 \mathbf{e}_z 分

别表示 x 和 z 方向的单位矢量。

关于磁介质受到外部磁场的作用,可用磁化强度 \mathbf{M} 衡量磁化程度,它与磁场强度 \mathbf{H} 之间的关系为

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} = \chi(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_a) \quad (2)$$

式中: χ 表示磁化率; \mathbf{H}_0 表示背景磁场; \mathbf{H}_a 表示与区域磁性体相关的磁异常场。对于 $\chi < 0.1$ SI 的弱磁性体, $\mathbf{H}_a \ll \mathbf{H}_0$,因此 \mathbf{H}_a 可忽略不计;对于 $\chi \geq 0.1$ SI 的强磁性体, \mathbf{H}_a 不可忽略。

对式(1)沿 x 方向进行一维傅里叶变换,得到空间一波数混合域磁位方程

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}(k, z)}{\partial z^2} - k^2 \tilde{U}(k, z) = ik\tilde{M}_x + \frac{\partial \tilde{M}_z}{\partial z} \quad (3)$$

式中: k 为 x 方向的波数; \tilde{U} 为空间一波数混合域磁位; \tilde{M}_x 、 \tilde{M}_z 分别为 x 和 z 方向上的空间一波数混合域磁化强度。

1.2 边界条件

式(3)的通解为

$$\tilde{U} = ae^{kz} + be^{-kz} \quad (4)$$

式中 a 和 b 为常数。在笛卡尔坐标系中,令 z 轴向下为正,模型的上边界 $z = z_{\min}$,下边界 $z = z_{\max}$,根据上行波和下行波相关理论,上、下边界条件分别为

$$\left. \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} \right|_{z=z_{\min}} = k\tilde{U} \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} \right|_{z=z_{\max}} = -k\tilde{U} \quad (6)$$

1.3 磁场和磁场梯度张量

对磁位求导可得到相应的磁异常场及其梯度张量,空间域磁异常场 \mathbf{B}_a 、磁异常场梯度张量 \mathbf{T} 和总强度磁异常 ΔT [26] 的计算公式分别为

$$\mathbf{B}_a = \begin{pmatrix} B_{ax} \\ B_{az} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} H_{ax} \\ H_{az} \end{pmatrix} = -\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} B_{axx} & B_{axz} \\ B_{azx} & B_{azz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_{ax}}{\partial x} & \frac{\partial B_{ax}}{\partial z} \\ \frac{\partial B_{az}}{\partial x} & \frac{\partial B_{az}}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\Delta T = \|\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_a\| - \|\mathbf{B}_0\| \quad (9)$$

式中: B_{ax} 、 B_{az} 分别表示磁异常场 \mathbf{B}_a 的 x 和 z 分量; H_{ax} 、 H_{az} 分别表示磁异常场强度的 \mathbf{H}_a 的 x 和 z 分量; B_{axx} 、 B_{axz} 、 B_{azx} 、 B_{azz} 表示磁异常场梯度张量的各个分量; $\mu = \mu_0(1 + \chi)$ 表示介质磁导率,其中 μ_0 表示真空磁导率; \mathbf{B}_0 为背景磁场,本文令 $B_0 = \|\mathbf{B}_0\| =$

50000 nT。

由式(7)可得空间一波数混合域磁位 \tilde{U} 与 $\tilde{\mathbf{B}}_a$ 磁场的关系为

$$\tilde{\mathbf{B}}_a = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{ax} \\ \tilde{B}_{az} \end{pmatrix} = -\mu \begin{pmatrix} ik\tilde{U} \\ k\tilde{U} \end{pmatrix} \quad (10)$$

式中 \tilde{B}_{ax} 和 \tilde{B}_{az} 分别表示空间一波数域磁异常场 $\tilde{\mathbf{B}}_a$ 的 x 和 z 分量。

由式(8)可得空间一波数混合域磁位 \tilde{U} 与磁异常场梯度张量 $\tilde{\mathbf{T}}$ 的关系式

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{axx} & \tilde{B}_{axz} \\ \tilde{B}_{azx} & \tilde{B}_{azz} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} k^2 \tilde{U} & k(-ik\tilde{U}) \\ -ik(k\tilde{U}) & -k^2 \tilde{U} \end{pmatrix} \quad (11)$$

式中: $\tilde{B}_{axx} = -\tilde{B}_{azz}$; $\tilde{B}_{axz} = \tilde{B}_{azx}$ 。

1.4 空间一波数域常微分方程的求解

联立式(3)、式(5)、式(6),可求解空间一波数混合域磁位的边值问题。

对于二维强磁性体,磁位在空间一波数混合域满足边值问题,可采用基于二次插值的一维有限单元法对其进行求解。该方法保留垂向方向为空间域,可根据实际需求灵活改变垂向网格密度,兼顾了计算精度和计算效率;利用有限元法得到的五对角线性方程组,可利用追赶法 [27] 实现方程组的高效、高精度求解。

基于变分原理 [25],得到与边值问题等价的变分问题

$$F(\tilde{U}) = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} \right)^2 dz + 2 \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \tilde{U} \left(ik\tilde{M}_x + \frac{\partial \tilde{M}_z}{\partial z} \right) dz + \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} (k\tilde{U})^2 dz + k(\tilde{U}_{z_{\max}}^2 + \tilde{U}_{z_{\min}}^2) \quad (12)$$

令 $\delta F(\tilde{U}) = 0$,在笛卡尔坐标系中,沿 z 方向进行单元剖分,采用二次插值函数,即 \tilde{U} 在每个单元内是二次变化的。对变分问题(式(12))逐项进行单元分析、总体合成,得到扩展矩阵或列阵

$$F(\tilde{U}) = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - 2\mathbf{u}^T \mathbf{P} \quad (13)$$

式中: \mathbf{u} 为某个波数在 z 方向各个节点的磁位 \tilde{U} 组成的列向量; $\mathbf{P} = \sum \mathbf{P}_{1q} \mathbf{sz}_q$ 是源项, q 表示积分单元;五对角矩阵 $\mathbf{K} = \sum \mathbf{K}_{1q} + \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ 。单元矩阵 \mathbf{K}_{1q} 、 \mathbf{b}_1 、 \mathbf{b}_2 、 \mathbf{P}_{1q} 和列阵 \mathbf{sz}_q 的求解见附录 A。

对 $F(\tilde{U})$ 求变分,得到

$$\delta F(\tilde{U}) = \delta \mathbf{u}^T (2\mathbf{K} \mathbf{u} - 2\mathbf{P}) = 0 \quad (14)$$

由于 $\delta \mathbf{u} \neq 0$,故

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (15)$$

基于磁异常场、磁异常场梯度张量与磁位之间的关系(式(10)、式(11)),可得到空间一波数混合域磁异常场 $\tilde{\mathbf{B}}_a$ 和磁异常场梯度张量 $\tilde{\mathbf{T}}$,最后利用一维傅里叶反变换,可得空间域的磁场 \mathbf{B}_a 和磁异常场梯度张量 \mathbf{T} 。

1.5 紧算子

求解空间一波数混合域磁位的边值问题时,磁化强度 \mathbf{M} 的表达式(式 2)中存在未知项 \mathbf{H}_a ,若直接求解,不能得到五对角线性方程组。本文采用迭代法对真解进行逐次逼近。在电磁法数值模拟中,Torres-Verdín 等^[28]提出了一种电磁场扩展的 Bron 近似法,这是一种基于内部场的新型近似法,通过将背景电场投影到散射张量上对电磁场进行近似表示,该方法适用于异常体体积较大、电阻率差异明显及宽频的情形。Zhdanov 等^[29]构建了一个收敛的 Bron 级数,Gao^[30]进一步修改得到新的收敛 Bron 近似。Ouyang 等^[17]基于前人研究,根据电磁场紧算子推导过程构造了适用于强磁场稳定收敛的迭代格式,其迭代公式为

$$\mathbf{H}^{(i+1)} = \frac{2[\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_a^{(i+1)}] + \chi \mathbf{H}^{(i)}}{2 + \chi} \quad (16)$$

式中: i 表示迭代次数; $\mathbf{H}^{(i)}$ 和 $\mathbf{H}^{(i+1)}$ 分别表示第 i 次和第 $i+1$ 次迭代得到的总场。

1.6 算法流程

本文提出的适用于大规模复杂条件(复杂磁化率分布和起伏地形)的二度体强磁场及其张量梯度的正演方法,即空间一波数混合域二维强磁场及梯度张量数值模拟方法流程见图 1,具体步骤如下:

(1)输入背景场磁场强度 \mathbf{H}_0 ,即第一次迭代时总磁场强度的初始值 $\mathbf{H}^{(0)}$;

(2)利用式(2)计算空间域磁化强度 \mathbf{M} ,并通过一维傅里叶变换得到空间一波数域磁化强度 $\tilde{\mathbf{M}}$;

(3)利用有限单元法求解空间一波数域磁位的边值问题,得到空间一波数域异常场磁位 \tilde{U}_a ;

(4)根据空间一波数域磁异常场强度与异常场磁位的关系求解空间一波数域异常磁场强度 $\tilde{\mathbf{H}}_a$,并通过一维反傅里叶变换,得到空间域磁异常强度 \mathbf{H}_a ;

(5)采用空间域紧算子(式(16)),得到校正后的总磁场 $\mathbf{H}^{(i+1)}$,定义两次迭代的强磁总场的相对误差 $\text{error} = \frac{|\sum |\mathbf{H}^{(i+1)}| - \sum |\mathbf{H}^{(i)}||}{\sum |\mathbf{H}^{(i+1)}|}$ 。若 $\text{error} < \varepsilon$ (ε

为期望值,本文设置为 1×10^{-4}),则输出 \mathbf{H}_a ,并基于空间域磁异常场 \mathbf{B}_a 计算空间域磁异常场梯度张量 \mathbf{T} ;若 $\text{error} \geq \varepsilon$,则返回第(2)步继续循环计算,直至满足精度要求。

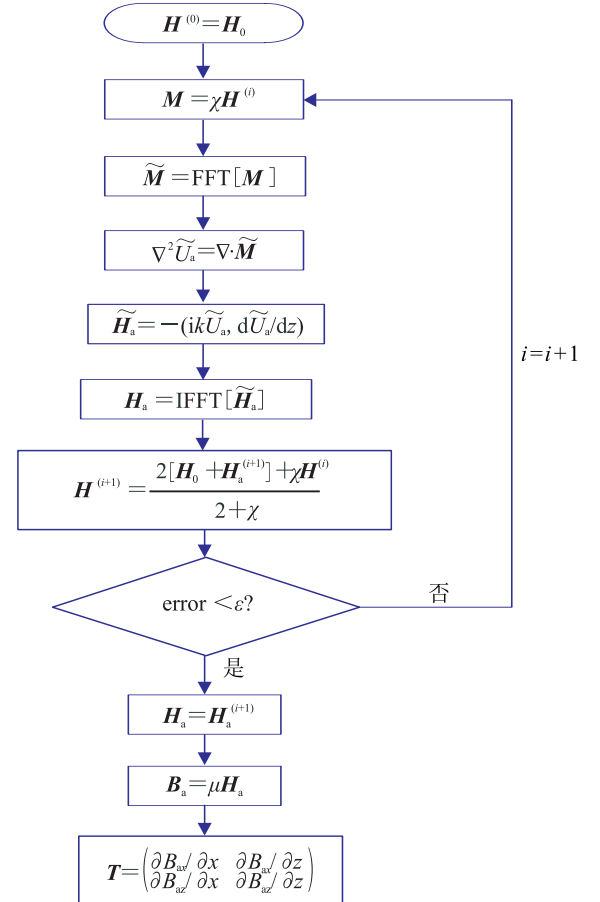


图 1 空间一波数混合域二维强磁场及梯度张量数值模拟迭代算法流程

2 算例分析

首先设计一个二维圆柱体模型和一个棱柱体模型分别验证本文算法的正确性和高效性,然后设计一个带起伏地形的、包含一个顺磁性异常体和一个强磁性异常体的模型,验证正演算法对复杂条件的适应性。算例采用串行计算,算法中的傅里叶变换通过 Gauss-FFT 实现。算法基于 Fortran95 语言编程,电脑配置为: Intel Core i3-4150 CPU,主频为 3.50 GHz,内存为 12 GB。

2.1 正确性验证

设计图 2 所示二维圆柱体模型,圆柱体沿 y 方向无限延伸,顶部埋深为 300 m。模型的研究区域

为: $x = [-2000 \text{ m}, 2000 \text{ m}]$, $z = [0, 1000 \text{ m}]$; 网格数为 $800(x) \times 400(y)$, 水平采样间隔为 5 m , 垂向采样间隔为 2.5 m ; 观测面为 $z = 0$ 。圆柱体磁异常场的 x 分量 B_{ax} 、 z 分量 B_{az} 、梯度张量水平分量 $\partial B_{ax}/\partial x$ 和垂向分量 $\partial B_{ax}/\partial z$ 的解析表达式详见附录 B。该模型的总强度磁异常 ΔT 、磁异常场 \mathbf{B}_a 及其梯度张量 \mathbf{T} 的解析解和数值解及观测面上各点的相对误差分别见图 3、图 4 和图 5。

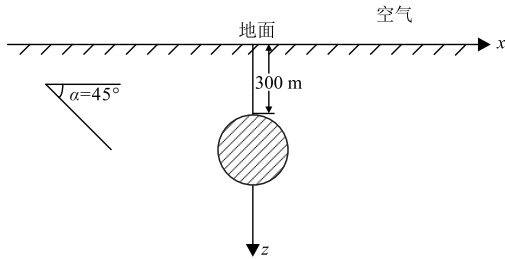


图 2 圆柱体模型示意图

圆柱体截面半径为 200 m , 圆心坐标 $(0, 500 \text{ m})$; 背景磁场 $T_0 = |\mathbf{T}_0| = 50000 \text{ nT}$; 异常体磁化率 $\chi = 5 \text{ SI}$, 磁倾角 $\alpha = 45^\circ$, 磁偏角 $\beta = 5^\circ$ 。

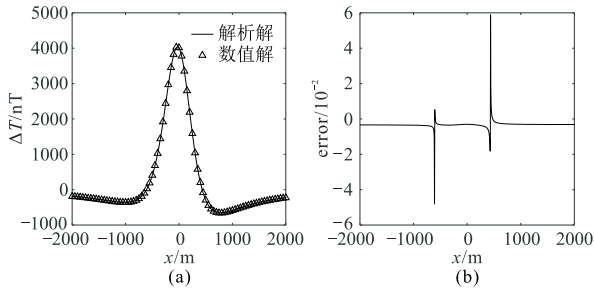


图 3 圆柱体模型总强度磁异常 ΔT 解析解和数值解(a)及其相对误差(b)

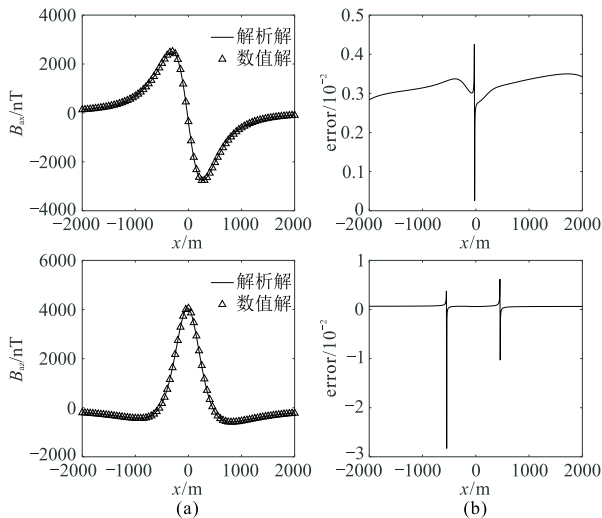


图 4 圆柱体模型磁异常场 B_{ax} (上)和 B_{az} (下)的解析解和数值解(a)及其相对误差曲线(b)

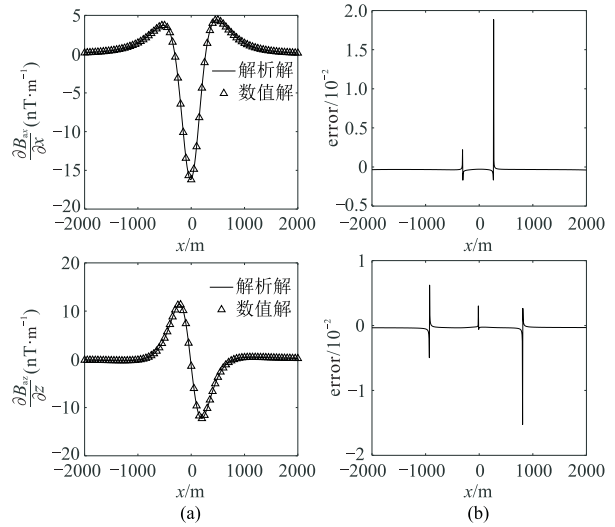


图 5 圆柱体模型磁异常场梯度张量 $\partial B_{ax}/\partial x$ (上)和 $\partial B_{ax}/\partial z$ (下)的解析解和数值解(a)及其相对误差(b)

由图 3~图 5 可以看出, ΔT 的相对误差小于 0.5% , B_{ax} 和 B_{az} 的相对误差小于 0.5% , $\partial B_{ax}/\partial x$ 和 $\partial B_{ax}/\partial z$ 的相对误差小于 0.1% , 即 ΔT 、 B_{ax} 、 B_{az} 、 $\partial B_{ax}/\partial x$ 和 $\partial B_{ax}/\partial z$ 的解析解和数值解基本吻合, 仅在极少数零值点附近相对误差较大。该圆柱体模型的正演结果验证了本算法的正确性。

图 6 为该模型的磁异常水平分量 B_{ax} 和垂直分量 B_{az} 的相对误差随迭代次数的变化曲线。可以看出, 经 9 次迭代后, 计算结果即可满足迭代终止条件。

改变圆柱体的磁化率 χ ($0 \sim 100 \text{ SI}$), 统计采用本文算法进行正演的迭代次数, 结果见图 7。可以看出, 随着 χ 的增大, 所需迭代次数呈近似线性增大趋势。

图 6 和图 7 表明本文迭代算法适应于不同磁化率的模型, 收敛稳定。

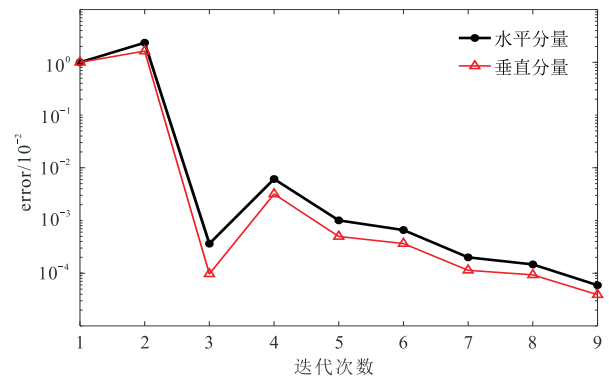
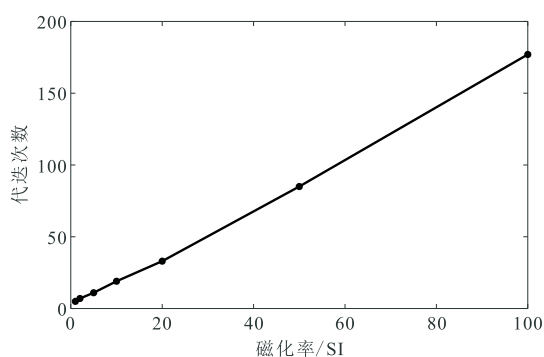


图 6 磁异常分量相对误差随迭代次数变化曲线

图 7 迭代次数随圆柱体磁化率 χ 的变化曲线

2.2 算法效率分析

引用文献[31]中的二度体模型(图 8),对比本文算法与 COMSOL 软件^[32]的计算效率。模型包含一个板状异常体,顶面埋深 100 m,大小为 100 m(x) \times 200 m(z);模拟研究区域为: $x=[-500 \text{ m}, 500 \text{ m}]$, $z=[0, 500 \text{ m}]$,剖分网格数为 200×100 ,水平采样间隔和垂向采样间隔均为 5 m。

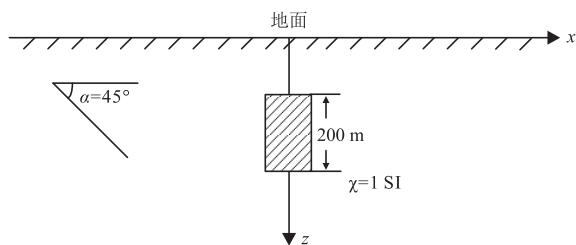


图 8 棱柱体模型示意图

背景磁场 $T_0 = 50000 \text{ nT}$,异常体磁化率 $\chi = 1 \text{ SI}$,磁倾角 $\alpha = 45^\circ$,磁偏角 $\beta = 90^\circ$ 。

参照文献[31]中利用有限体积法计算得到的数值解,衡量 COMSOL 软件和本文算法的精度。引入相对均方根误差 rrms ^[33]统计整条观测线上总强度磁异常 ΔT 的相对误差

$$\text{rrms} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (X_i - Y_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N Y_i^2}} \times 100\% \quad (17)$$

式中: N 表示观测总点数; X_i 表示 COMSOL 或者本文算法计算得到的第 i 个观测点的总强度磁异常; Y_i 表示有限体积法计算得到的第 i 个观测点的总强度磁异常。

当网格数为 200×100 时,采用本文算法的 rrms 为 2.84%,计算时间 0.75 s,占用内存 12.0 MB。表 1 为不同网格剖分方案下基于 COMSOL 软件的计算精度、耗时和内存占用。基于 COMSOL 计算时需对

研究范围进行扩边处理,当网格扩边 4 倍时, rrms 为 2.92%,计算时间 618 s,占用内存 2387.1 MB。因此,与 COMSOL 软件相比,在获得相似精度的情况下,本文算法耗时更短,占用内存更少,计算效率更高。

表 1 COMSOL 计算时间与占用内存统计

网格数	rrms %	计算时间 s	占用内存 MB
200 \times 100(不扩边)	110.90	14	80.5
600 \times 300(扩边 2 倍)	9.57	130	887.4
1000 \times 500(扩边 4 倍)	2.92	618	2387.1

有限体积法、COMSOL 软件(扩边 4 倍)和本文算法的总强度磁异常见图 9a,以有限体积法的数值解为参照,采用 COMSOL 软件和本文方法计算结果的相对误差见图 9b。可以看出,采用 COMSOL 软件和空间一波数域方法计算得到的总强度磁异常与有限体积法的计算结果图形均大致吻合。

对于图 8 模型,改变模型网格剖分个数,分析本文算法计算时间和占用内存随网格节点数的变化,结果见图 10 和表 2。对比表 1 与表 2,可见本文算法计算时间更短、占用内存更少,占用内存和计算时间与网格节点数均呈现近似线性正相关变化趋势。

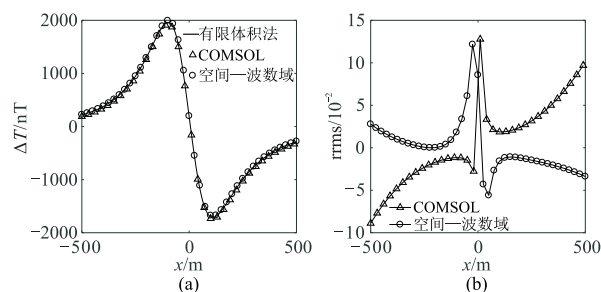
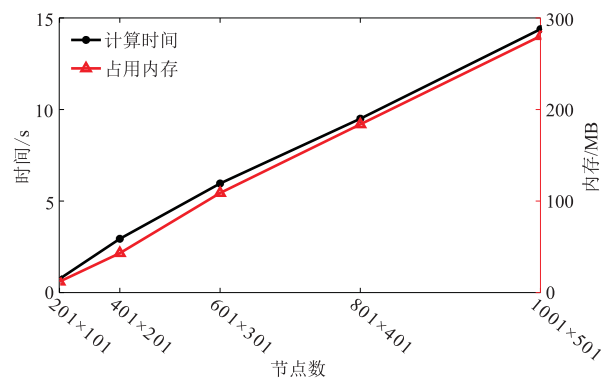
图 9 棱柱体模型不同方法得到的总强度磁异常 ΔT (a) 及相对误差 (b)

图 10 棱柱体模型本文算法计算时间和占用内存随网格剖分节点数的变化

表 2 棱柱体模型本文算法计算时间与占用内存统计

网格数	计算时间/s	占用内存/MB
200×100	0.75	12.0
400×200	2.94	43.1
600×300	5.96	108.8
800×400	9.50	183.8
1000×500	14.39	280.2

2.3 适应性验证

为了验证本文正演算法对复杂模型的适应性,设计一个起伏地形模型(图 11),模型同时包含顺磁性异常体和强磁性异常体。模型的背景磁场 $T_0 = 50000 \text{ nT}$,磁倾角 $\alpha = 45^\circ$,磁偏角 $\beta = 5^\circ$ 。研究区域: $x = [-2000 \text{ m}, 2000 \text{ m}]$,网格数为 400; $z = [-320 \text{ m}, 820 \text{ m}]$,其中 z 方向区间 $[320 \text{ m}, 820 \text{ m}]$ 为起伏地形最低点以下的计算区域,网格数为 100。起伏地形高程满足函数

$$f(x) = \frac{1}{5}(2000 - |x|)\sin \frac{x}{100\pi}$$

$$x \in [-2000, 2000] \quad (18)$$

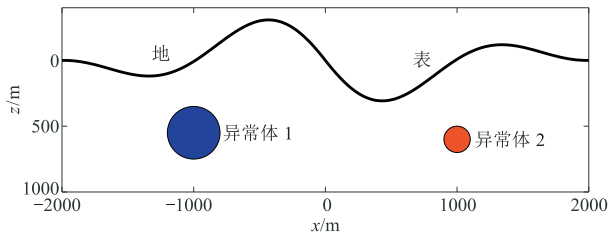


图 11 起伏地形模型示意图

异常体 1: 磁化率 $\chi_1 = 0.001 \text{ SI}$, 圆心坐标 $(-1000 \text{ m}, 550 \text{ m})$, 半径 $r = 200 \text{ m}$; 异常体 2: 磁化率 $\chi_2 = 1.5 \text{ SI}$, 圆心坐标 $(1000 \text{ m}, 600 \text{ m})$, 半径 $r = 100 \text{ m}$ 。异常体沿 y 方向无限延伸。

基于该模型研究起伏地形条件下插值平面个数对数值解计算精度的影响。起伏地形在 z 方向的区域为 $[-320 \text{ m}, 320 \text{ m}]$, 该方向采用均匀网格剖分, 将插值平面个数分别设为 5、9、13、17、21、25、29 和 33。采用式(17)计算整条起伏观测线上的总强度磁异常 ΔT 、磁异常场 B_a 及梯度张量 T 的解析解。

图 12 为该起伏地形模型的总强度磁异常、磁异常场及梯度张量的解析解和数值解的相对均方根误差随插值平面个数的变化曲线。可以看出, 总强度磁异常、磁异常场与其梯度张量的 rrms 均随插值平面个数的增加而降低。采用 5 个平面进行插值时, 起伏地形上总强度磁异常、磁异常场与其梯度张量的 rrms 均大于 1%; 当采用 25 个及以上不同高度

平面进行插值时, 起伏地形上总强度磁异常、磁异常场与其梯度张量的 rrms 均低于 1%, 约为 0.9%, 说明采用 25 个插值平面即可达到满意的计算精度。

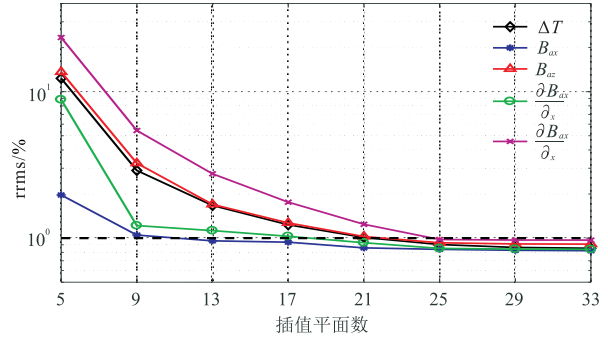


图 12 rrms 随插值平面数的变化曲线

另外, 采用 25 个插值平面时, 耗时约 2.330 s, 占用内存 52.8 MB, 表明本文算法计算速度快、占用内存小, 适用于复杂地形下二度体磁异常场及其梯度张量的计算, 计算效率较高。

采用 25 个高度平面进行插值, 基于本文方法得到的总强度磁异常、磁异常场及其梯度张量分别见图 13、图 14 和图 15。可以看出, 解析解和数值解的吻合度很高, 表明了本文算法对复杂地形模型的计算精度较高。

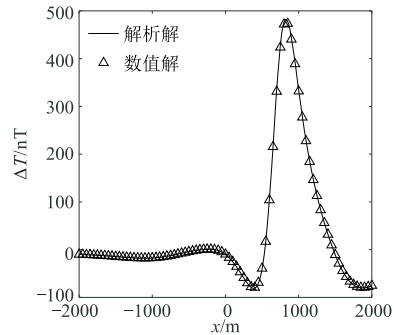


图 13 起伏地形模型总强度磁异常解析解与数值解对比

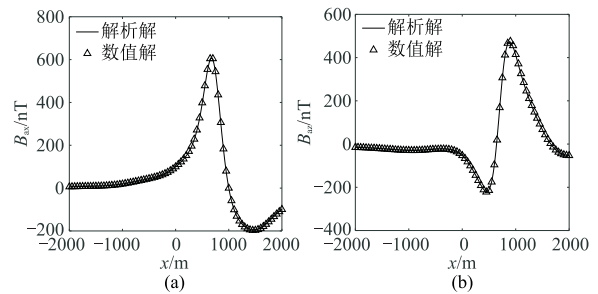


图 14 起伏地形模型磁异常场解析解和数值解对比

(a) B_{ax} ; (b) B_{ay}

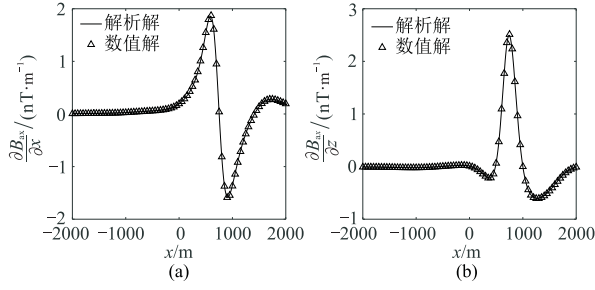


图 15 起伏地形模型磁异常场梯度张量解析解和数值解对比

(a) $\partial B_{ax}/\partial x$; (b) $\partial B_{ax}/\partial z$

3 结论

针对强磁性体的退磁效应不能忽略的问题,本文提出了一种空间一波数混合域二度体磁异常场及其梯度张量正演方法。该算法充分利用了傅里叶变换的快速性、追赶法求解的高效性和迭代算法的稳定性的优势,实现了二维强磁性体磁异常场及其梯度张量的高效、高精度数值模拟。设计了水平地形圆柱体模型进行数值试验,通过对比解析解与数值解验证了本算法的正确性和较高的精度;以有限体积分法数值解为参照,对比了本文算法和 COMSOL 软件的计算效率,证明了本算法的高效性;利用起伏地形下同时包含顺磁性异常体和强磁性异常体的复杂模型验证了本算法对复杂地质条件的适应性。另外,在本文算法的计算环节中,正、反傅里叶变换和求解常微分方程这两个环节均有很好的并行性,采用并行方式可进一步提高计算效率。本文为地下二度体磁异常场及其张量梯度的正演提供了一种高效、高精度算法,对于二度体磁异常的反演和人机交互正、反演解释具有重要意义。

附录 A 三维强磁场变分问题求解

求解变分问题(式(12))时,可将其写为

$$F(\tilde{U}) = \sum \int_q \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} \right)^2 dz + \sum \int_q (k\tilde{U})^2 dz + 2 \sum \int_q \tilde{J}\tilde{U} dz + k(\tilde{U}_{z_{\max}}^2 + \tilde{U}_{z_{\min}}^2) \quad (\text{A-1})$$

式中

$$\tilde{J} = ik\tilde{M}_x + \frac{\partial \tilde{M}_x}{\partial z} \quad (\text{A-2})$$

令

$$\begin{cases} \mathbf{N} = (N_j, N_p, N_m)^T \\ \mathbf{u}_q = (u_j, u_p, u_m)^T \end{cases} \quad (\text{A-3})$$

式中: j, m 分别为单元两端节点坐标; p 为单元中点坐标; 积分区域 q 为单元范围。可得

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}^T \mathbf{u}_q = \mathbf{u}_q^T \mathbf{N} \quad (\text{A-4})$$

式(A-1)中第一项单元积分为

$$\begin{aligned} \int_q \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right)^2 dz &= \mathbf{u}_q^T \left(\int_q \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} dz \right) \mathbf{u}_q \\ &= \mathbf{u}_q^T \mathbf{K}_{1q} \mathbf{u}_q \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

其中

$$\mathbf{K}_{1q} = \int_q \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} dz = \frac{1}{3l} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad (\text{A-6})$$

式中 l 为单元长度。

式(A-1)中第二项单元积分为

$$\int_q k^2 \mathbf{u}^2 dz = \mathbf{u}_q^T \left(\int_q k^2 \mathbf{N} \mathbf{N}^T dz \right) \mathbf{u}_q = \mathbf{u}_q^T \mathbf{K}_{2q} \mathbf{u}_q \quad (\text{A-7})$$

其中

$$\mathbf{K}_{2q} = \int_q k^2 \mathbf{N} \mathbf{N}^T dz = \frac{lk^2}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{A-8})$$

式(A-1)中第三项单元积分为

$$\int_q \tilde{J} \mathbf{u} dz = \int_q J_{az} \mathbf{u} dz \quad (\text{A-9})$$

利用形函数可将上式中的 J_{az} 表示为

$$\begin{aligned} J_{az} &= J_{azj} N_j + J_{azp} N_p + J_{azm} N_m \\ &= \mathbf{N}^T \mathbf{s} z_q = \mathbf{s} z_q^T \mathbf{N} \end{aligned} \quad (\text{A-10})$$

其中

$$\mathbf{s} z_q = (J_{azj}, J_{azp}, J_{azm})^T \quad (\text{A-11})$$

则式(A-9)中右端项可表示为

$$\int_q J_{az} \mathbf{u} dz = \mathbf{u}_q^T \left(\int_q \mathbf{N} \mathbf{N}^T dz \right) \mathbf{s} z_q = \mathbf{u}_q^T \mathbf{P}_{1q} \mathbf{s} z_q \quad (\text{A-12})$$

其中

$$\mathbf{P}_{1q} = \int_q \mathbf{N} \mathbf{N}^T dz = \frac{l}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{A-13})$$

式(A-1)中, $z = z_{\min}, z = z_{\max}$ 分别为第一个和最后一个节点,可将其分别扩展为

$$\begin{cases} k u_{z_{\min}}^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{b}_1 \mathbf{u} \\ k u_{z_{\max}}^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{b}_2 \mathbf{u} \end{cases} \quad (\text{A-14})$$

其中

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-15})$$

$$\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ k \end{bmatrix} \quad (\text{A-16})$$

综上所述,式(A-1)可表示为

$$F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - 2\mathbf{u}^T \mathbf{P} \quad (\text{A-17})$$

附录 B 二维圆柱体强磁场及其梯度张量解析解

假设沿走向无限长圆柱体的磁化率为 χ , 半径为 a , 则该圆柱体外的 \mathbf{H}_a 可以表示为

$\mathbf{H}_a =$

$$\frac{C_m}{r^4} \begin{bmatrix} (x-x_0)^2 - (z-z_0)^2 & 2(x-x_0)(z-z_0) \\ 2(x-x_0)(z-z_0) & (z-z_0)^2 - (x-x_0)^2 \end{bmatrix} \mathbf{H}_0 \quad (\text{B-1})$$

$$C_m = \frac{\chi a^2}{2 + \chi} \quad (\text{B-2})$$

式中 $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2}$ 表示观测点 (x, z) 到磁异常体中心 (x_0, z_0) 的距离。

沿走向无限长圆柱体的磁场梯度张量

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_{ax}}{\partial x} & \frac{\partial B_{ax}}{\partial z} \\ \frac{\partial B_{az}}{\partial x} & \frac{\partial B_{az}}{\partial z} \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial H_{ax}}{\partial x} & \frac{\partial H_{ax}}{\partial z} \\ \frac{\partial H_{az}}{\partial x} & \frac{\partial H_{az}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{B-3})$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{ax}}{\partial x} &= -\frac{\partial H_{az}}{\partial z} \\ &= \frac{2C_m}{r^6} [H_{0x}(x-x_0)[3(z-z_0)^2 - (x-x_0)^2] + \\ &\quad H_{0z}(z-z_0)[(z-z_0)^2 - 3(x-x_0)^2]] \quad (\text{B-4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{ax}}{\partial z} &= \frac{\partial H_{az}}{\partial x} \\ &= \frac{2C_m}{r^6} [H_{0x}(z-z_0)[(z-z_0)^2 - 3(x-x_0)^2] + \\ &\quad H_{0z}(x-x_0)[(x-x_0)^2 - 3(z-z_0)^2]] \quad (\text{B-5}) \end{aligned}$$

式中 H_{0x} 、 H_{0z} 分别为背景磁场 \mathbf{H}_0 的 x 分量和 z 分量。

参考文献

- [1] 李媛媛, 杨宇山, 刘天佑. 考虑自退磁影响的三维复杂形体磁场正反演研究进展与展望[J]. 地球物理学进展, 2010, 25(2): 627-634.
LI Yuanyuan, YANG Yushan, LIU Tianyou. Magnetic forward and reverse modelling of 3D bodies of arbitrary shape with consideration of demagnetization: progress and prospect [J]. Progress in Geophysics, 2010, 25(2): 627-634.
- [2] 陈欣. 二度体重磁位场及其梯度张量正演算法研究[D]. 广西桂林: 桂林理工大学, 2017.
CHEN Xin. Research on the Algorithms for Forward Modeling of Gravity and Magnetic Fields and Their Gradient Tensor for 2D Body[D]. Guilin University of Technology, Guilin, Guangxi, 2017.
- [3] BHATTACHARYYA B K, CHAN K C. Computation of gravity and magnetic anomalies due to inhomogeneous distribution of magnetization and density in a localized region[J]. Geophysics, 1977, 42(3): 602-609.
- [4] BHATTACHARYYA B K, LEU L K. Spectral analysis of gravity and magnetic anomalies due to two-dimensional structures[J]. Geophysics, 1975, 40(6): 993-1013.
- [5] PEDERSEN L B. Wavenumber domain expressions for potential fields from arbitrary 2-, 2.5-, and 3-dimensional bodies[J]. Geophysics, 1978, 43(3): 626-630.
- [6] 吴宣志. 三度体(物性随深度变化模型)位场波谱的正演计算[J]. 地球物理学报, 1983, 26(2): 177-187.
WU Xuanzhi. The computation of spectrum of potential field due to 3-D arbitrary bodies with physical parameters varying with depth [J]. Chinese Journal of Geophysics, 1983, 26(2): 177-187.
- [7] TALWANI M, HEIRTZLER J R. Computation of magnetic anomalies caused by two dimensional structures of arbitrary shape//Parks G A. Computers in the Mineral Industries[M]. School of Earth Sciences, Stanford University, Stanford, 1964, 464-480.
- [8] SHUEY R T, PASQUALE A S. End corrections in magnetic profile interpretation[J]. Geophysics, 1973, 38(3): 507-512.
- [9] PLOUFF D. Gravity and magnetic fields of polygonal prisms and application to magnetic terrain corrections [J]. Geophysics, 1976, 41(4): 727-741.
- [10] SINGH B, GUPTASARMA D. New method for fast computation of gravity and magnetic anomalies from arbitrary polyhedra[J]. Geophysics, 2001, 66(2): 521-526.
- [11] WON I J, BEVIS M. Computing the gravitational and magnetic anomalies due to a polygon: algorithms and Fortran subroutines[J]. Geophysics, 1987, 52(2): 232-238.
- [12] 贾真. 均匀二度体位场正演与径向反演方法[D]. 吉林长春: 吉林大学, 2009.
JIA Zhen. Forward Modeling and Radial Inverse of Potential Fields Produced by a 2D Homogeneous Source[D]. Jilin University, Changchun, Jilin, 2009.
- [13] 柴玉璞. 偏移抽样理论及其应用[M]. 北京: 石油工业出版社, 1997.
CHAI Yupu. Shift Sampling Theory and Its Application[M]. Petroleum Industry Press, Beijing, 1997.

- [14] TONTINIF C, COCCHI L, CARMISCIANO C. Rapid 3-D forward model of potential fields with application to the Palinuro Seamount magnetic anomaly (southern Tyrrhenian Sea, Italy) [J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2009, 114(B2): B02103.
- [15] WU L, TIAN G. High-precision Fourier forward modeling of potential fields [J]. *Geophysics*, 2014, 79(5): G59-G68.
- [16] ESKOLA L, TERVO T. Solving the magnetostatic field problem (a case of high susceptibility) by means of the method of subsection [J]. *Geoexploration*, 1980, 18(2): 79-95.
- [17] OUYANG F, CHEN L. Iterative magnetic forward modeling for high susceptibility based on integral equation and Gauss-fast Fourier transform [J]. *Geophysics*, 2020, 85(1): J1-J13.
- [18] KOSTROV N P. Calculation of magnetic anomalies caused by 2D bodies of arbitrary shape with consideration of demagnetization [J]. *Geophysical Prospecting*, 2007, 55(1): 91-115.
- [19] 付文祥. 考虑退磁影响的任意形状二度体的磁异常计算研究[D]. 北京: 中国地质大学(北京), 2011.
FU Wenxiang. Calculation of Magnetic Anomalies Caused by 2D Bodies of Arbitrary Shape with Consideration of Demagnetization[D]. China University of Geosciences (Beijing), Beijing, 2011.
- [20] 欧洋, 冯杰, 赵勇, 等. 同时考虑退磁和剩磁的有限体积分法正演模拟 [J]. *地球物理学报*, 2018, 61(11): 4635-4646.
OU Yang, FENG Jie, ZHAO Yong, et al. Forward modeling of magnetic data using the finite volume method with a simultaneous consideration of demagnetization and remanence [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2018, 61(11): 4635-4646.
- [21] 王书惠. 用有限元法计算非均匀磁化磁性体(二度)的有效磁化强度和磁异常 [J]. *地质与勘探*, 1980(9): 49-57.
WANG Shuhui. Calculation of effective magnetization and magnetic anomaly of inhomogeneous magnetized magnetic body (second degree) by finite element method [J]. *Geology and Exploration*, 1980(9): 49-57.
- [22] 刘双, 刘天佑, 高文利, 等. 基于 FlexPDE 考虑退磁作用的有限元法磁场正演 [J]. *物探化探计算技术*, 2013, 35(2): 134-141, 117.
LIU Shuang, LIU Tianyou, GAO Wenli, et al. Magnetic forward modeling considering demagnetization effect using finite element method based on FlexPDE [J]. *Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration*, 2013, 35(2): 134-141, 117.
- [23] 刘鑫磊. 退磁效应影响下的磁异常三维正反演研究 [D]. 北京: 中国地质大学(北京), 2014.
- [24] PURSSM B J, CULL J P. A new iterative method for computing the magnetic field at high magnetic susceptibilities [J]. *Geophysics*, 2005, 70(5): L53-L62.
- [25] 徐世浙. 地球物理中的有限单元法 [M]. 北京: 科学出版社, 1994.
XU Shizhe. *Finite Element Method in Geophysics* [M]. Science Press, Beijing, 1994.
- [26] BLAKELY R J. *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications* [M]. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [27] 徐士良. FORTRAN 常用算法程序集(2版) [M]. 北京: 清华大学出版社, 1995.
XU Shiliang. *FORTRAN Common Algorithm Assembly (2nd ed)* [M]. Tsinghua University Press, Beijing, 1995.
- [28] TORRES-VERDIN C, HABASHY T M. Rapid 2.5-dimensional forward modeling and inversion via a new nonlinear scattering approximation [J]. *Radio Science*, 1994, 29(4): 1051-1079.
- [29] ZHDANOV M S, FANG S. Quasi-linear approximation in 3-D electromagnetic modeling [J]. *Geophysics*, 1996, 61(3): 646-665.
- [30] GAO G. Simulation of Borehole Electromagnetic Measurements in Dipping and Anisotropic Rock Formations and Inversion of Array Induction Data [M]. The University of Texas, Austin, Texas, USA, 2006.
- [31] 刘鹏飞. 岩石磁性特征及考虑退磁影响的正反演研究 [D]. 湖北武汉: 中国地质大学(武汉), 2019.
LIU Pengfei. *Magnetic Behavior of Rocks and Forward and Inverse Models Incorporating Demagnetization* [D]. China University of Geosciences (Wuhan), Wuhan, Hubei, 2019.
- [32] 李付龙. 基于 COMSOL 仿真软件的大地电磁测深法三维正反演研究 [D]. 四川成都: 成都理工大学, 2020.
LI Fulong. *Research on 3D Forward and Inversion of Magnetotelluric Sounding Based on COMSOL Simulation Software* [D]. Chengdu University of Technology, Chengdu, Sichuan, 2020.
- [33] 李颖梅, 戴世坤, 李昆, 等. 复杂条件二维重力场及重力张量场空间波数域正演方法 [J]. *物探化探计算技术*, 2019, 41(2): 207-213.
LI Yingmei, DAI Shikun, LI Kun, et al. Fast forward modelling of gravity field and gradient tensor for complex two-dimensional anomaly [J]. *Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration*, 2019, 41(2): 207-213.

(本文编辑: 刘海樱)

作者简介



戴世坤 教授, 博士生导师, 1964 年生; 1984 年毕业于赣州地质学校, 1991 年获中国地质大学地球探测与信息技术专业硕士学位, 1994 年获中国海洋大学地球探测与信息技术专业理学博士学位; 1997 年完成石油大学(北京)博士后研究后留校任教; 2011 年受聘为中南大学教授, 主要从事重、磁、电、震三维正、反演理论与方法研究及相关软件系统的开发。